4.7) Να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a>1 \\ 1, & a=1 \\ 0, & 0<a<1 \end{cases}$, ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a>1 \\ 1, & a=1 \\ +\infty, & 0<a<1 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

i) • $a>1$, τότε $a=1+\theta, \theta>0 \Rightarrow a^\nu=(1+\theta)^\nu \geqslant 1+\theta\nu>\theta\nu$ (Σελ 48)

Άρα, $\lim a^\nu=+\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N}): \nu>\nu_0 \Rightarrow a^\nu>\frac{1}{\varepsilon}$

$(\nu_0+1>\nu_0)\Rightarrow\left(a^{\nu_0+1}>\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Έστω, $x_\nu\to+\infty$ και βρίσκουμε $\lim a^{x_\nu}$

αφού $x_\nu\to+\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon^*>0)(\exists\nu_1\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\ \nu>\nu_1 \Rightarrow x_\nu>\frac{1}{\varepsilon^*}\equiv\nu_0+1$

$\Rightarrow a^{x_\nu}>a^{\nu_0+1}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \lim a^{x_\nu}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$

• $a=1$, Προφανές

• $0<a<1$ (Σελ 29) $\Rightarrow |a|<1 \Rightarrow \frac{1}{|a|}>1 \Rightarrow \frac{1}{|a|}=1+\theta, \forall\theta>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{|a|^\nu}=(1+\theta)^\nu \geqslant 1+\nu\theta>\nu\theta$

Άρα, $\lim a^\nu=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N}): \nu>\nu_0 \Rightarrow a^\nu<\varepsilon$

$(\nu_0+1>\nu_0)\Rightarrow(a^{\nu_0+1}<\varepsilon)$

Έστω, $x_\nu\to+\infty$ και βρίσκουμε $\lim a^{x_\nu}$.

αφού $x_\nu\to+\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon^*>0)(\exists\nu_1\in\mathbb{N}): \nu>\nu_1 \Rightarrow x_\nu>\frac{1}{\varepsilon^*}\equiv\nu_0+1$

$\Rightarrow a^{x_\nu}<a^{\nu_0+1}<\varepsilon \Rightarrow \lim a^{x_\nu}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$

ii) • $\alpha>1$, τοτε $\alpha=1+\theta,\ \theta>0 \Rightarrow \alpha^{\nu}=(1+\theta)^{\nu}\geq 1+\nu\theta>\nu\theta$

Άρα, $\lim\alpha^{\nu}=+\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N}): \nu>\nu_0 \Rightarrow \alpha^{\nu}>\frac{1}{\varepsilon}$

Εστω $x_\nu \to -\infty$ και θα βρουμε $\lim \alpha^{x_\nu}$ $\quad (\nu_0+1>\nu_0)\Rightarrow\left(\alpha^{\nu_0+1}>\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Αφου $x_\nu\to-\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon^*>0)(\exists\nu_1\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N}): \nu>\nu_1 \Rightarrow x_\nu<-\frac{1}{\varepsilon^*}\equiv-(\nu_0+1)$

$\Rightarrow \alpha^{x_\nu}<\alpha^{-(\nu_0+1)}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow$ με $\frac{1}{\alpha^{\nu_0+1}}>\varepsilon$

Άρα $\alpha^{x_\nu}<\varepsilon \Rightarrow \lim\alpha^{x_\nu}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{x}=0$

• $\alpha=1$, Προφανες

• $0<\alpha<1 \Rightarrow |\alpha|<1 \Rightarrow \frac{1}{|\alpha|}>1 \Rightarrow \frac{1}{|\alpha|}=1+\theta,\ +\theta>0 \Rightarrow \frac{1}{|\alpha|^{\nu}}=(1+\theta)^{\nu}\geq$

$\geq 1+\nu\theta>\nu\theta$

Άρα, $\lim\alpha^{\nu}=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\ \nu>\nu_0 \Rightarrow \alpha^{\nu}<\varepsilon$

$(\nu_0+1>\nu_0)\Rightarrow(\alpha^{\nu_0+1}<\varepsilon)$

Θα βρω το $\lim\alpha^{x_\nu}$ για $x_\nu\to-\infty$

Αφου $x_\nu\to-\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon^*>0)(\exists\nu_1\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\ \nu>\nu_1 \Rightarrow x_\nu<-\frac{1}{\varepsilon}\equiv-(\nu_0+1)$

$\Rightarrow x_\nu>-(\nu_0+1) \Rightarrow \alpha^{x_\nu}>\alpha^{-(\nu_0+1)}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \alpha^{x_\nu}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\alpha^{x_\nu}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{x}=+\infty$ $\quad$ όπου $\alpha^{-(\nu_0+1)}>\frac{1}{\varepsilon}$